

מבוא למתמטיקה

פרק 20 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

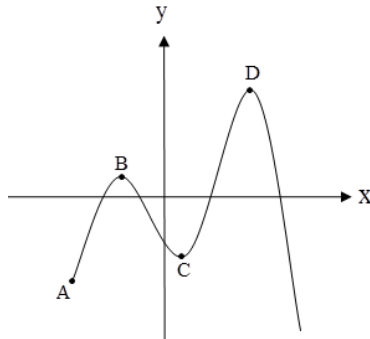
תוכן העניינים

1. נקודות קיצון של פונקציות 1
2. חקירת פונקציה פולינומית 4
3. פונקציה זוגית ואי-זוגית 8

נקודות קיצון של פונקציות:

סיכום כללי:

נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):



- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B, C, D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית.
- נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

שאלות:

1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

2) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

- מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

- (3) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$.
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (5) לפונקציה $f(x) = ax - x^3 - 5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.
 מצא את ערכו של הפרמטר a .
- (6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון.
 מצא את הקבוע a .
- (7) לפונקציה $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה: $(2, 3)$.
 מצא את ערכי הפרמטרים A, B .
- (8) לפונקציה $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$ יש נקודת קיצון ב- $x = -1$ ו- $x = 4$.
 מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- y של שתי נקודות הקיצון.
- (9) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון.
 מצא את הפרמטרים a, b .
- (10) לפונקציה $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2, 3)$.
 מצא את ערכי הפרמטרים a, b .

תשובות סופיות:

$$(1) \max(5, 25)$$

$$(2) \text{א. } \min(2, -16), \max(-2, 16) \quad \text{ב. עולה: } x > 2, x < -2 \text{ יורדת: } -2 < x < 2$$

$$(3) \text{א. } \max(0, 9), \min(\sqrt{5}, -16), \min(-\sqrt{5}, -16)$$

$$\text{ב. עולה: } -\sqrt{5} < x < 0, x > \sqrt{5} \text{ יורדת: } 0 < x < \sqrt{5}, x < -\sqrt{5}$$

$$(4) \text{א. } \min(3, 5) \quad \text{ב. עולה: } x > 3 \text{ יורדת: } x < 3$$

$$(5) a = 3$$

$$(6) a = -\frac{2}{3}$$

$$(7) A = -1, B = 3$$

$$(8) A = \frac{1}{3}, B = -\frac{3}{2}, \left(-1, 2\frac{1}{6}\right), \left(4, -18\frac{2}{3}\right)$$

$$(9) b = 6, a = -4$$

$$(10) a = 2, b = -16$$

חקירת פונקציה פולינומית:

שאלות:

(11) נתונה הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(12) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(14) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15 נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים :

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

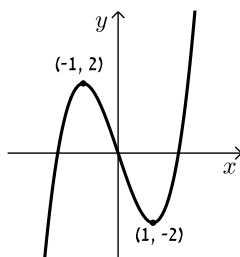
16 נתונה הפונקציה : $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$.

- לאילו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
- הצב בפונקציה $a = 6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים :
תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y , סרטוט.

17 נתונה הפונקציה : $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$ (פרמטר).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה : $x = 2$.

- מצא את d .
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



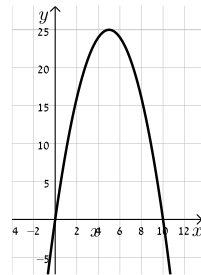
18 לפניך גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:

- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?
- האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

תשובות סופיות:

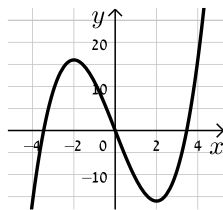
11) א. כל x ב. $\max(5, 25)$ ג. עלייה: $x < 5$, ירידה: $x > 5$

ד. $(0, 0)$, $(10, 0)$.



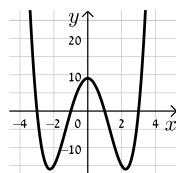
12) א. כל x ב. $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$ ג. עלייה: $x > 2$, $x < -2$, ירידה: $-2 < x < 2$

ד. $(0, 0)$, $(\sqrt{12}, 0)$, $(-\sqrt{12}, 0)$.



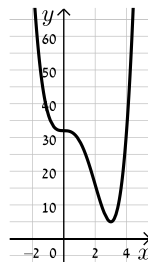
13) א. כל x ב. $\max(0, 9)$, $\min(\sqrt{5}, -16)$, $\min(-\sqrt{5}, -16)$ ג. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$, ירידה: $x < -\sqrt{5}$, $0 < x < \sqrt{5}$

ד. $(0, 9)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm 3, 0)$.



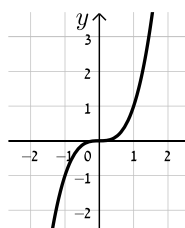
14) א. כל x ב. $\min(3, 5)$ ג. תחומי עלייה: $x > 3$, תחומי ירידה: $x < 3$

ד. $(0, 32)$.



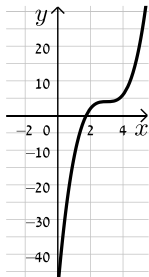
15) א. כל x ב. אין. ג. עולה לכל x

ד. $(0, 0)$.



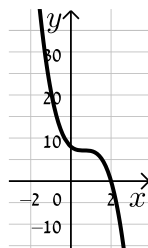
16) א. $-6 < a < 6$ ב. תחום הגדרה: כל x , נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל x ,

תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים: $(0, -50)$, להלן גרף:



17) א. $d = 8$ ב. לא. ג. יורדת בתחום $x \neq \frac{2}{3}$

ד. $(0, 8)$ ה. להלן גרף:



18) א. 1. ב. 2. ג. 3. ד. $k > 2, k < -2$

ה. $k = \pm 2$ ו. $-2 < k < 2$ ז. לא.

פונקציה זוגית ואי-זוגית:

סיכום כללי:

הגדרות:

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x) = f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x) = -f(x)$.

שאלות:

(1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x) = 3x - 5$

ב. $f(x) = 3x^2$

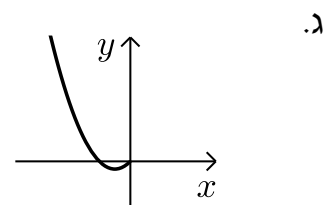
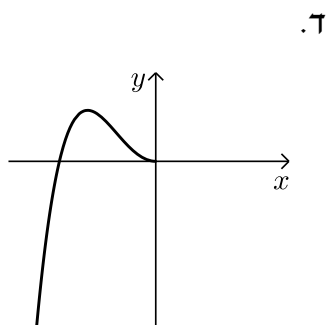
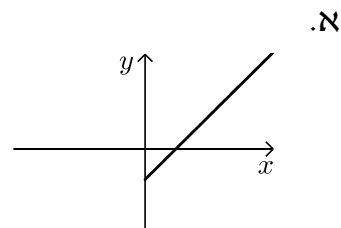
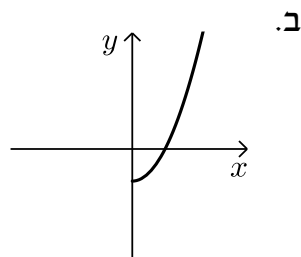
ג. $f(x) = 2x^3$

ד. $f(x) = x^3 - 2x^2$

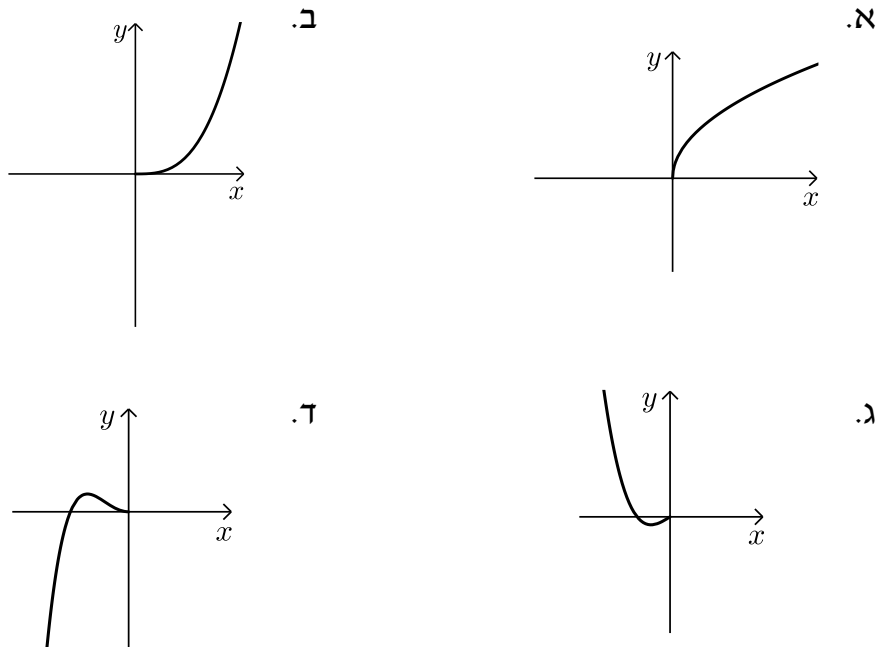
ה. $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

ו. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$

(2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה זוגית:



(3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x .
 השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



- (4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^4 - 4x^2$ בתחום: $[0:3]$.
- תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.
- ג. התבסס על ממצאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

(5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- y , מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.
- ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.
- ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל x בתחום הגדרתה.

(6) לפניך הפונקציה: $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$, פרמטר a .

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
- ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

(7) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 3x^3 - 9x$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.
- ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

- (8) לפינך הפונקציה הבאה : $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$, פרמטר b .
 ידוע כי הישר $y = 2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה
 שמקיימות : $f'(x) = 0$.
- מצא את b וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
 - חקור את הפונקציה בתחום : $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים :
 - תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.
 נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.
 - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה
 של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

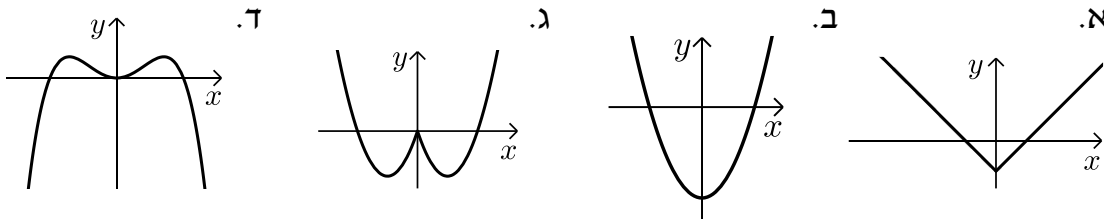
(9) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$.

- חקור את הפונקציה בתחום : $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים :
 - תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן
 (בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?
 נמק ע"י חישוב מתאים.
- הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית
 את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

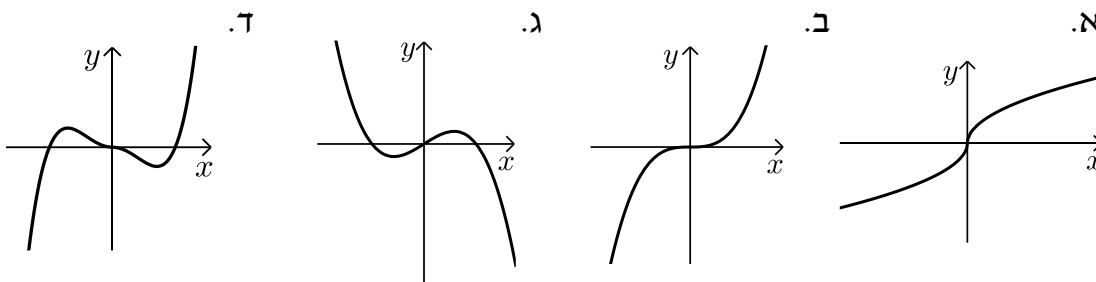
תשובות סופיות:

(1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

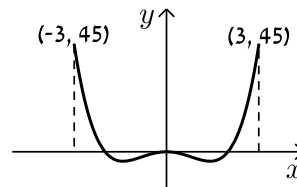
(2) להלן הגרפים:



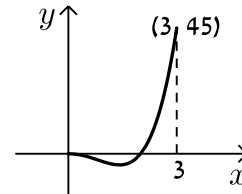
(3) להלן הגרפים:

(4) א. i. $0 \leq x \leq 3$ ii. $(0,0), (2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min(\sqrt{2}, -4)$.iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$ ב. סעיף הוכחה. $\max(0,0)$ קצה.

סרטוט עבור סעיף ג:

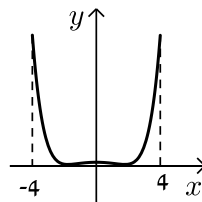


סרטוט עבור חלק v:

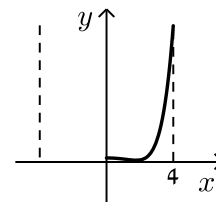
(5) א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 4$, חיתוך עם ציר ה- y : $(0,3)$,נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$ ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

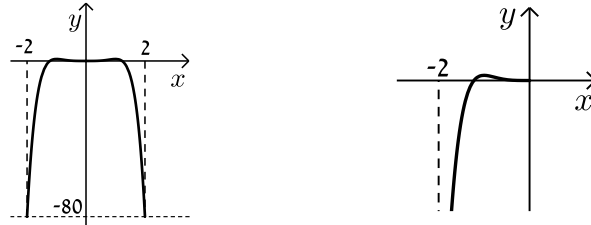
סרטוט עבור סעיף ג:



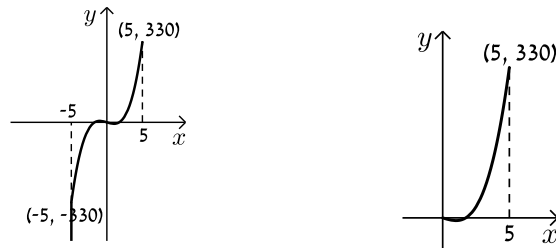
סרטוט עבור סעיף א:



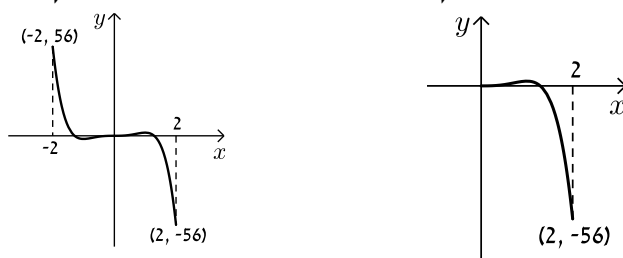
- 6) א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2 \leq x \leq 0$, חיתוך עם הצירים:
 נקודות קיצון: $(-1.225, 0)$, $(0, 0)$, $\min(-2, -80)$ קצה, $\max(-1, 1)$ קצה, $\min(0, 0)$ קצה,
 עולה: $-2 < x < -1$, יורדת: $-1 < x < 0$. ג. זוגית.
 סרטוט עבור סעיף א: סרטוט עבור סעיף ד:



- 7) א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 5$, חיתוך עם הצירים: $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$,
 נקודות קיצון: $\max(5, 330)$ קצה, $\min(1, -6)$ קצה, $\max(0, 0)$ קצה,
 עולה: $1 < x < 5$, יורדת: $0 < x < 1$. ב. אי-זוגית.
 סרטוט עבור סעיף א: סרטוט עבור סעיף ג:



- 8) א. $b=0$ ב. i $0 \leq x \leq 2$ ii $(0, 0)$, $(1.29, 0)$ iii $\min(2, -56)$ קצה,
 iv עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $1 < x < 2$. ג. אי-זוגית.
 סרטוט עבור סעיף v: סרטוט עבור סעיף ד:



- 9) א. i $-4 \leq x \leq 0$ ii $(-1, 0)$, $(0, 0)$ iii $\min(0, 0)$ קצה, $\max(-0.723, 0.207)$ קצה,
 iv עולה: $-4 < x < -0.723$. ג. אי-זוגית.
 סרטוט עבור סעיף v: סרטוט עבור סעיף ד:

